

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сопротивление материалов»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания для индивидуальных работ для студентов
специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»
дистанционной формы обучения

II семестр

Могилев 2014

Расчет статически неопределимой рамы методом сил

Алгоритм решения статически неопределимых рам методом сил:

1) Определяется степень статической неопределимости системы, которая заменяется статически определимой системы путем удаления «лишних» связей.

Степень статической неопределимости n простой системы (количество «лишних» связей) определяется по формуле:

$$n = 2 \cdot Ш + C_0 - 3 \cdot Д,$$

где $Ш$ – число простых шарниров (равно $k-1$, где k – число дисков, соединяемых шарниром);

C_0 – число опорных стержней (равно число реакций, которые могут возникать во всех опорах системы);

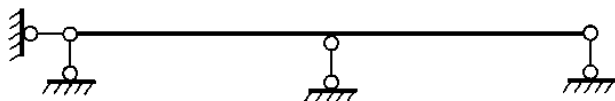
$Д$ – число дисков.

Например, степени статической неопределимости:

- балки (рисунок 1 а): $n = 2 \cdot 0 + 4 - 3 \cdot 1 = 1$;

- рамы (рис. 1 б): $n = 2 \cdot 2 + 4 - 3 \cdot 2 = 2$.

а)



б)

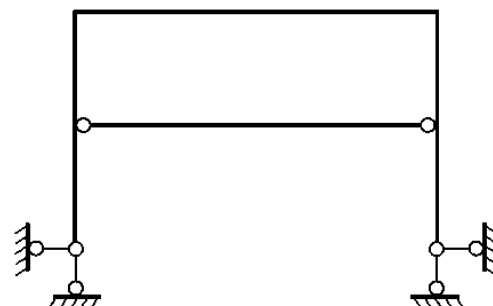


Рисунок 1 – Примеры статически неопределимых систем

2) С целью превращения статически неопределимой системы в статически определимую исключаются «лишние» связи. Их реакции заменяют неизвестными силами. Полученная система называется *основной системой (ОС)*.

Например, у балки (рисунок 2 а), которую далее будем называть *заданной системой (ЗС)*, степень статической неопределимости $n=1$. Если исключить «лишнюю» связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через X , получим ее ОС (рисунок 2 б). Способов исключения лишних связей очень много (рисунок 2 в-д). При этом объем вычислений в разных ОС будет различным. Поэтому из многих вариантов ОС необходимо выбирать наиболее оптимальную. Например, первый вариант ОС (рисунок 2 б) предпочтительнее остальных, т.к. в этом случае эпюры построить проще.

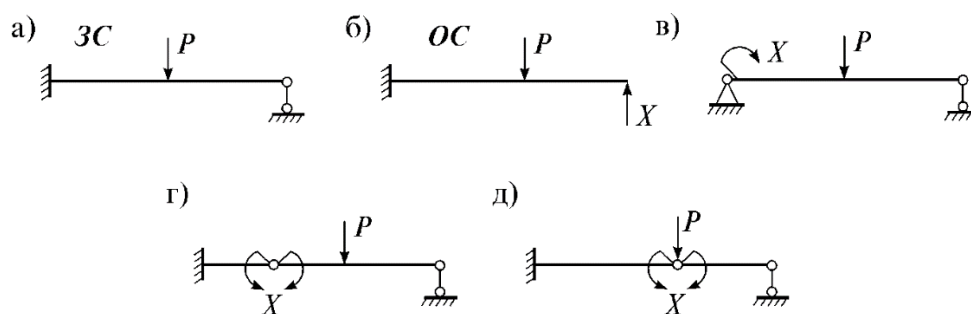


Рисунок 2 – Примеры получения основной системы метода сил

3) Составляются канонические уравнения метода сил из условия, что перемещения системы по направлениям отброшенных связей равны нулю. Причем количество уравнений равно количеству отброшенных «лишних» связей:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} + \Delta_{1P} &= 0, \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \dots + X_n \cdot \delta_{2n} + \Delta_{2P} &= 0, \\ &\vdots \\ X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned}$$

где δ_{ii} – главные коэффициенты;

δ_{ij} – боковые коэффициенты;

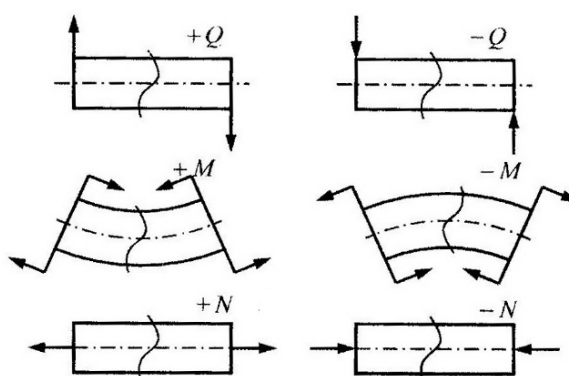
Δ_{iP} – грузовые коэффициенты.

Коэффициент δ_{21} представляет собой перемещение по направлению силы X_2 , вызванное силой, равной единице, действующей по направлению силы X_1 .

Симметрично расположенные относительно главной диагонали боковые коэффициенты равны, т.е. $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

4) Для определения коэффициентов канонических уравнений в основной системе строятся единичные эпюры \bar{M}_i от действия усилий отброшенных «лишних» связей и грузовая эпюра M_P изгибающих моментов от действия заданной внешней нагрузки.

При построении эпюр необходимо руководствоваться правилами знаков поперечных, продольных сил и изгибающих моментов:



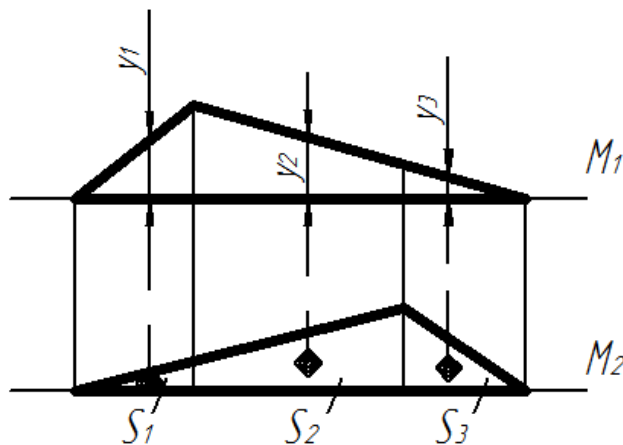
Главные и боковые коэффициенты определяются способом Верещагина (перемножением эпюр от единичных сил). Аналогично определяются грузовые коэффициенты ($\Delta_{iP} = \overline{M}_i \cdot M_P$):

$$\delta_{ij} = \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EI}, \quad \Delta_{iP} = \frac{\overline{M}_i \cdot M_P}{EI},$$

где EI – изгибная жесткость балки.

Результат перемножения двух эпюр по способу Верещагина равен произведению площади одной из них на ординату другой эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры. При этом для эпюр, ограниченных прямыми линиями, не имеет значения на какой из них брать площадь, а на какой ординату.

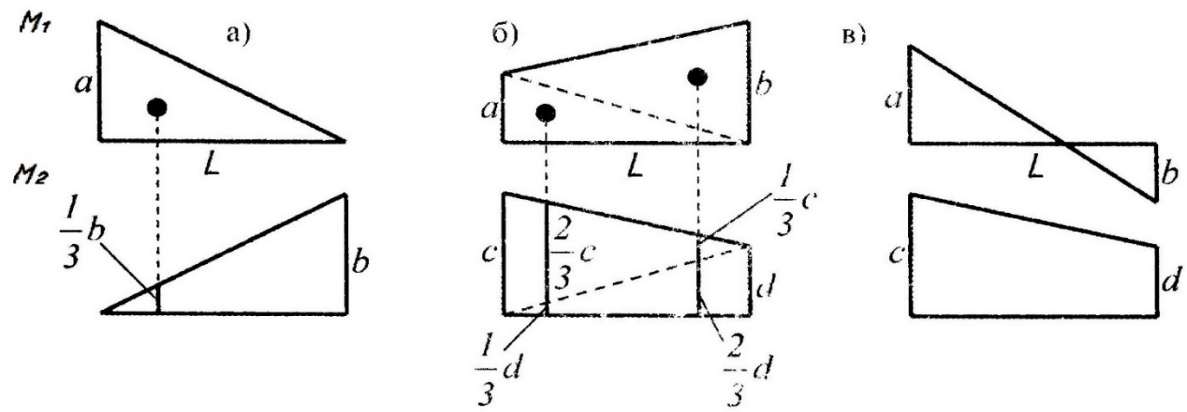
Эпюры должны перемножаться по участкам, т.е. перемножаются части эпюры, где она не меняет характер своего поведения.



$$M_1 \cdot M_2 = S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3$$

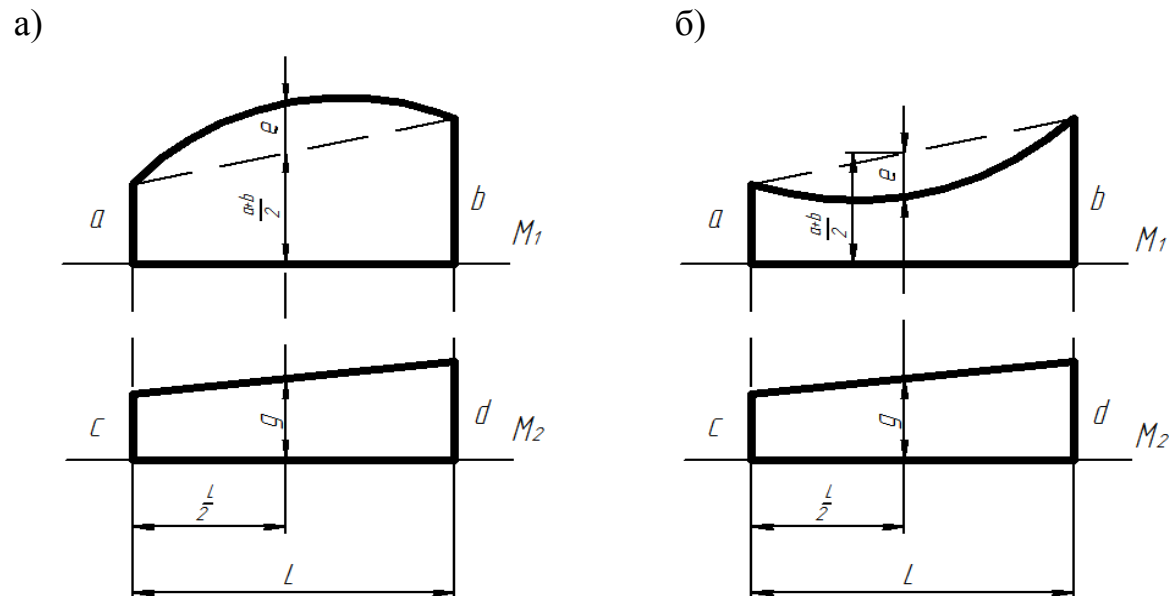
Рисунок 3 – Пример перемножения эпюр по участкам

Рассмотрим примеры перемножения эпюр, представляющих различные фигуры:



- а) $M_1 \cdot M_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot L\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot b\right)$ – для треугольников;
- б) $M_1 \cdot M_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot L\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot L\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot c + \frac{2}{3} \cdot d\right)$ – для трапеций;
- б) $M_1 \cdot M_2 = \frac{L}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c)$ – для трапеций;
- в) $M_1 \cdot M_2 = \frac{L}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d - b \cdot c)$ – для трапеций;

Рисунок 4 – Перемножение эпюр в виде различных прямолинейных фигур



- а) $M_1 \cdot M_2 = \frac{L}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c) + \frac{2}{3} \cdot e \cdot L \cdot g$ – для выпуклой фигуры;
- б) $M_1 \cdot M_2 = \frac{L}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c) - \frac{2}{3} \cdot e \cdot L \cdot g$ – для вогнутой фигуры;
- $$g = \frac{c+d}{2}.$$

Рисунок 5 – Перемножение эпюр в виде прямолинейной и криволинейной фигур

Следует обратить внимание, что произведение ординат эпюр, расположенных по одну сторону от нулевой линии, берется со знаком «+», по разные стороны – со знаком «-». Формула для трапеций применима и когда эпюры в виде треугольников – в этих случаях треугольник рассматривается как трапеция с нулевой стороной.

5) Проверяются коэффициенты канонических уравнений:

а) *Универсальная проверка* используется для одновременной проверки главных и боковых коэффициентов системы канонических уравнений. Если их сумма равна произведению суммарной единичной эпюры на себя, то эти коэффициенты вычислены верно.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \overline{M}_{\Sigma} \cdot \overline{M}_{\Sigma} = \overline{M}_{\Sigma}^2.$$

б) *Постолбцовая проверка* используется для проверки коэффициентов одного столбца системы канонических уравнений. Если сумма всех грузовых коэффициентов равна произведению суммарной единичной эпюры на грузовую эпюру, то грузовые коэффициенты вычислены верно.

$$\sum_{j=1}^n A_{iP} = \overline{M}_{\Sigma} \cdot M_P.$$

6) Решается система канонических уравнений и определяются неизвестные усилия X_i .

7) Строятся эпюры изгибающих моментов от каждого найденного усилия X_i . При этом ординаты имеющейся единичной эпюры \overline{M}_i умножаются на найденную величину X_i .

8) Строится итоговая эпюра изгибающих моментов (M): Ординаты построенных эпюр изгибающих моментов от каждого найденного усилия X_i складываются с ординатами грузовой эпюры (M_p).

9) На базе эпюры M строится эпюра поперечных сил (Q).

10) Методом вырезания узлов из эпюры поперечных сил строится эпюра продольных сил (N).

1 Пример расчета статически неопределимой рамы методом сил

Задача: построить эпюры изгибающих моментов (M), поперечных сил (Q) и продольных сил (N) для заданной статически неопределимой рамы методом сил (рисунок 6, а).

1) Определяем степень статической неопределимости системы:

$$N = C_0 + 2 \cdot III - 3 \cdot Д = 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 2.$$

2) Выбираем основную систему (рисунок 6, б):

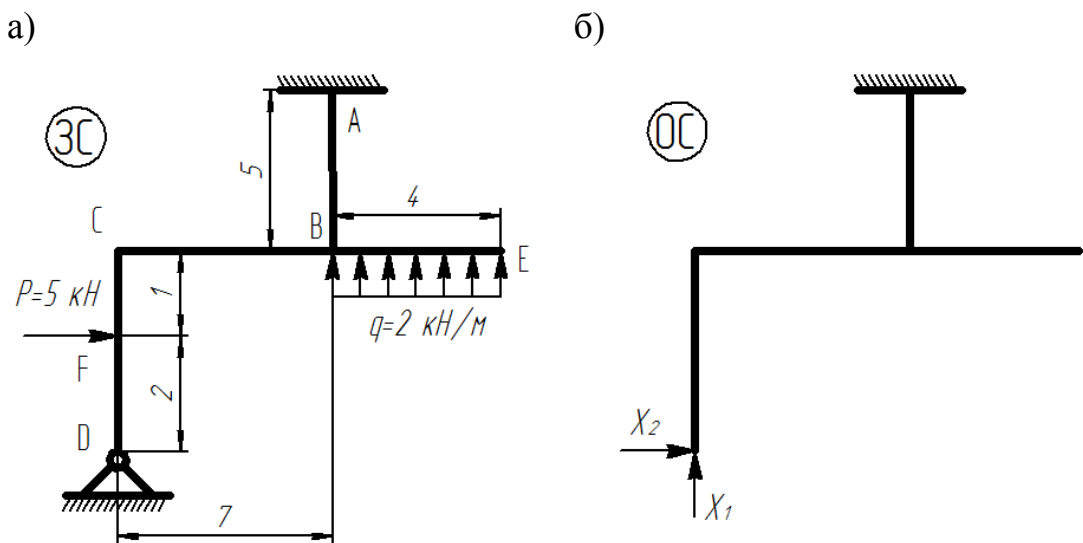


Рисунок 6 – Рама

3) Составляем систему канонических уравнений:

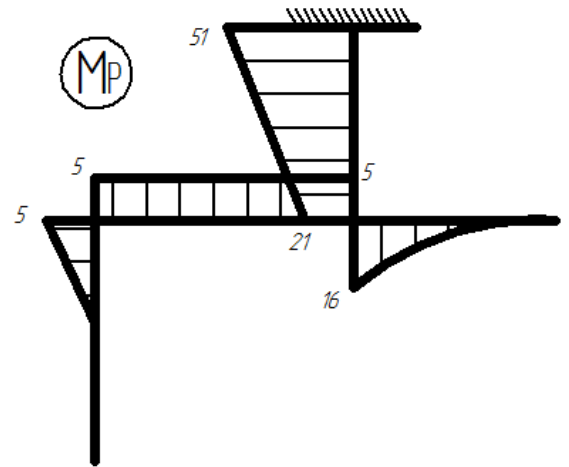
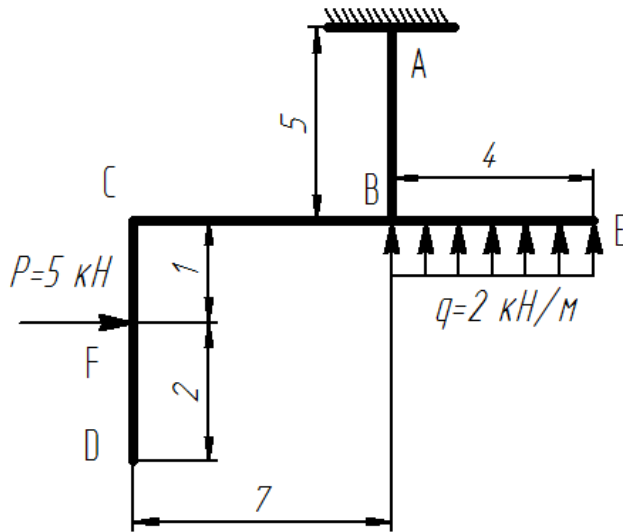
$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

4) Определяем коэффициенты канонических уравнений:

4.1) Строим эпюру изгибающего момента M_p (грузовую эпюру):

Построение эпюры изгибающего момента начинается с любого «свободного» конца рамы (в данном примере «свободными» концами будут участки **ДВ** и **ЕВ**, участок **АВ** станет «свободным», если найти реакции в заделке) до узла, где этот конец соединяется с другим «свободным» концом (в данном примере это **В**). При этом эпюра для «свободных» концов строится независимо от внешних сил, действующих на других участках рамы и таким образом строят эпюры для всех «свободных» концов. Далее если из этого узла (**В**) выходит конец, который не является свободным (в данном примере это **АВ**), то для него эпюра изгибающего

момента строится с учетом внешних сил, действующих на «свободных» концах, которые сходятся в этом узле.



Рассмотрим «свободный» конец DB:

$$M_D = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{DF} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{DC} = -P \cdot 1 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{DC'} = -P \cdot 1 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{DB} = -P \cdot 1 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Рассмотрим «свободный» конец EB:

$$M_E = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

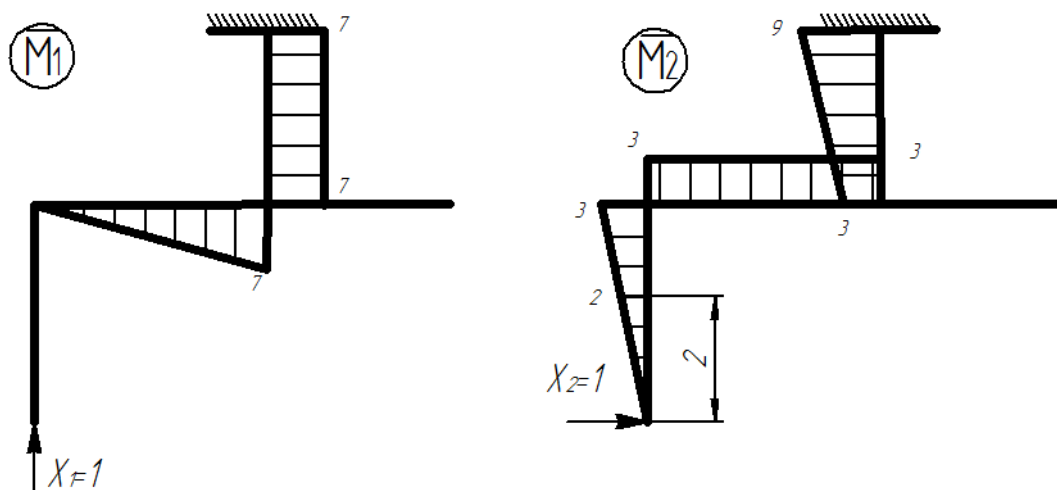
$$M_{EB} = q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Рассмотрим «несвободный» конец AB:

$$M_B = P \cdot 1 + q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 21 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{BA} = P \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 51 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4.2) Строим эпюры изгибающих моментов от единичных сил (аналогично эпюре M_p):



4.3) Определяем главные коэффициенты:

Коэффициент δ_{11} для примера рассчитаем через формулы для треугольников и прямоугольников (а), а также трапеций (б):

$$\text{а) } \delta_{11} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 + 7 \cdot 6 \cdot 7 \right) = \frac{408,3}{EJ};$$

$$\text{б) } \delta_{11} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{7}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \cdot 7 + 0 \cdot 7 + 7 \cdot 0) + \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 7 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7) \right) = \frac{408,3}{EJ}.$$

Остальные коэффициенты будем считать по формулам для трапеций:

$$\delta_{22} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2 \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0) + \frac{7}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) + \right. \\ \left. + \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 9 \cdot 9 + 9 \cdot 3 + 3 \cdot 9) \right) = \frac{306}{EJ}.$$

4.4) Определяем боковые коэффициенты:

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{7}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 7 - 3 \cdot 7 + 0 \cdot 3) + \frac{6}{6} \cdot (-2 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 \cdot 7 - 7 \cdot 3 - 9 \cdot 7) \right) = -\frac{325,5}{EJ}.$$

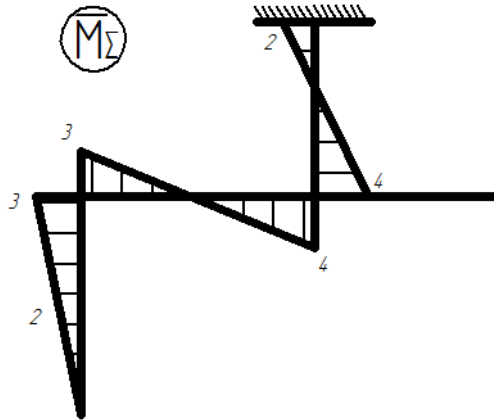
4.5) Определяем грузовые коэффициенты:

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot M_P \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{7}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 7 - 7 \cdot 5 + 0 \cdot 5) + \frac{6}{6} \cdot (-2 \cdot 7 \cdot 21 - 2 \cdot 51 \cdot 7 - 51 \cdot 7 - 21 \cdot 7) \right) = -\frac{1634,5}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_2 \cdot M_P \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2) + \frac{7}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3) + \right. \\ \left. + \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 21 \cdot 3 + 2 \cdot 51 \cdot 9 + 21 \cdot 9 + 51 \cdot 3) \right) = \frac{1497,7}{EJ}$$

5) Проверяем коэффициенты канонических уравнений:

5.1) Строим суммарную единичную эпюру изгибающих моментов:



5.2) Проверяем главные и боковые коэффициенты:

$$\sum \delta_{ij} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_\Sigma \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3) + \frac{7}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3) + \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2) \right) = \frac{63,3}{EJ};$$

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{63,3}{EJ}.$$

5.3) Проверяем грузовые коэффициенты:

$$\sum \Delta_{iP} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot M_P \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 5) + \frac{7}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3) + \frac{6}{6} \cdot (-2 \cdot 21 \cdot 4 + 2 \cdot 51 \cdot 2 + 21 \cdot 2 - 51 \cdot 4) \right) \approx -\frac{137}{EJ}$$

$$\sum \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} \approx -\frac{137}{EJ}$$

6) Преобразуем и решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \frac{408,3}{EI} - X_2 \cdot \frac{325,5}{EI} - \frac{1634,5}{EI} = 0 \\ -X_1 \cdot \frac{325,5}{EI} + X_2 \cdot \frac{306}{EI} + \frac{1497,7}{EI} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} X_1 \cdot 408,3 - X_2 \cdot 325,5 = 1634,5 \\ -X_1 \cdot 325,5 + X_2 \cdot 306 = -1497,7 \end{cases};$$

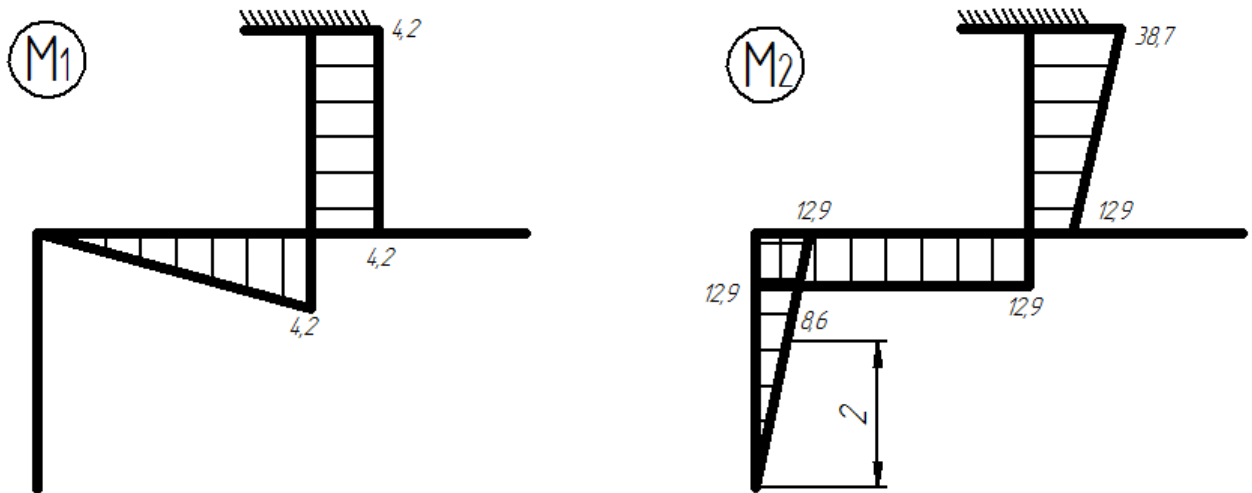
$$X_1 = \frac{1634,5 + X_2 \cdot 325,5}{408,3} = 4 + X_2 \cdot 0,8;$$

$$-(4 + X_2 \cdot 0,8) \cdot 325,5 + X_2 \cdot 306 = -1497,7;$$

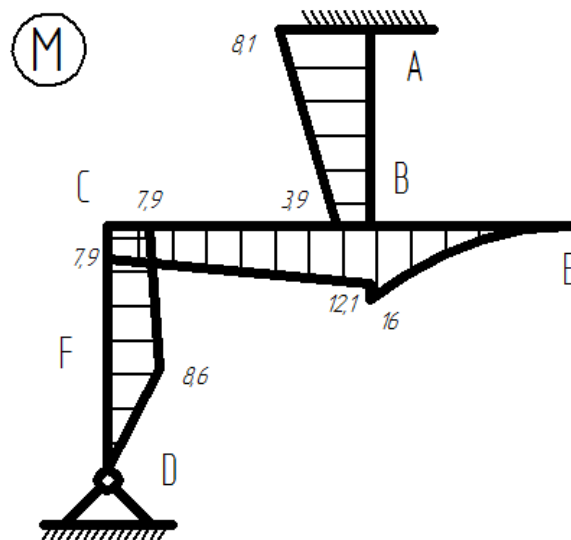
$$X_2 = -4,3 \text{ кН};$$

$$X_1 = 0,6 \text{ кН}.$$

7) Умножаем каждую единичную эпюру на соответствующее значение силы X_i ($M_1 = \overline{M}_1 \cdot X_1$, $M_2 = \overline{M}_2 \cdot X_2$):



8) Строим итоговую эпюру изгибающих моментов $M = M_1 + M_2 + M_p$:



9) Строим эпюру поперечных сил (Q):

$$Q = \frac{M_{np} - M_{лев}}{L} \pm \frac{q \cdot L}{2}.$$

Знак « \pm » в формуле ставится в соответствии с правилом знаков поперечных сил (если сила распределенная нагрузка q «вращается» относительно точки по часовой стрелки, то знак «+», если против часовой – знак «-»).

$$Q_{DF} = \frac{0 - (-8,6)}{2} = 4,3 \text{ кН};$$

$$Q_{FC} = \frac{-8,6 - (-7,9)}{1} = -0,7 \text{ кН};$$

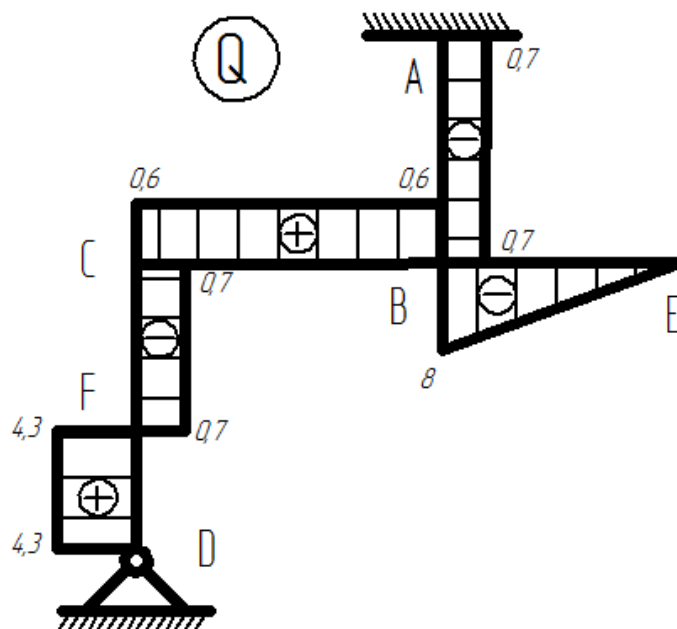
$$Q_{CB} = \frac{12,1 - 7,9}{7} = 0,6 \text{ кН};$$

$$Q_{BE} = \frac{0 - 16}{4} \pm \frac{2 \cdot 4}{2} = -4 \pm 4;$$

$$Q_{BE}^B = -4 - 4 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_{BE}^E = -4 + 4 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_{BA} = \frac{-8,1 - (-3,9)}{6} = -0,7 \text{ кН}.$$



10) Строим эпюру продольных сил (N):

Способом вырезания узлов (рисунок 7, б) из эпюры поперечных сил строим эпюру продольных сил (рисунок 7, а) с учетом изложенного выше правила знаков (если продольная сила направлена к узлу, то на эпюре N знак «-», если от узла, то знак «+»):

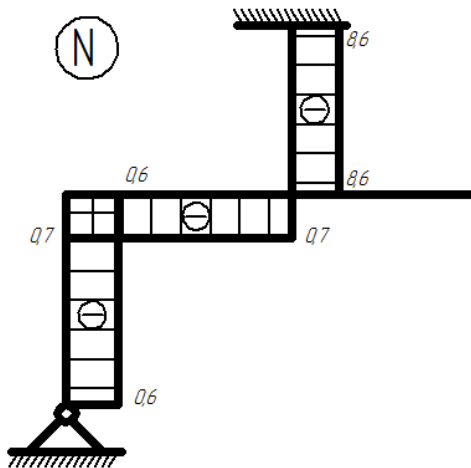
Узел С:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ Q_{FC} - N_{CB} &= 0; & N_{CB} &= 0,7 \text{ кН}; \\ \sum Y &= 0; \\ N_{DC} - Q_{CB} &= 0; & N_{DC} &= 0,6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Узел В:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ -Q_{BA} + N_{CB} - N_{BE} &= 0; & N_{BE} &= 0 \text{ кН}; \\ \sum Y &= 0; \\ Q_{CB} + Q_{BE} - N_{AB} &= 0; & N_{AB} &= 8,6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

а)



б)

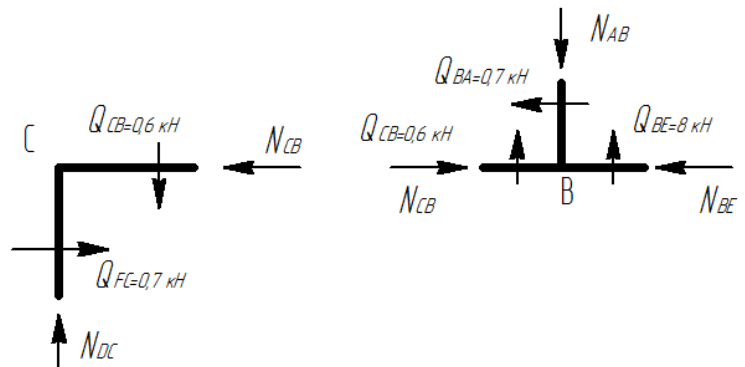


Рисунок 7 – Построение эпюры продольных сил

2 Пример расчета статически неопределимой рамы методом сил

Задача: построить эпюры изгибающих моментов (M), поперечных сил (Q) и продольных сил (N) для заданной статически неопределимой рамы методом сил (рисунок 8, а).

1) Определяем степень статической неопределимости системы:

$$N = C_0 + 2 \cdot III - 3 \cdot D = 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 2.$$

2) Выбираем основную систему (рисунок 8, б):

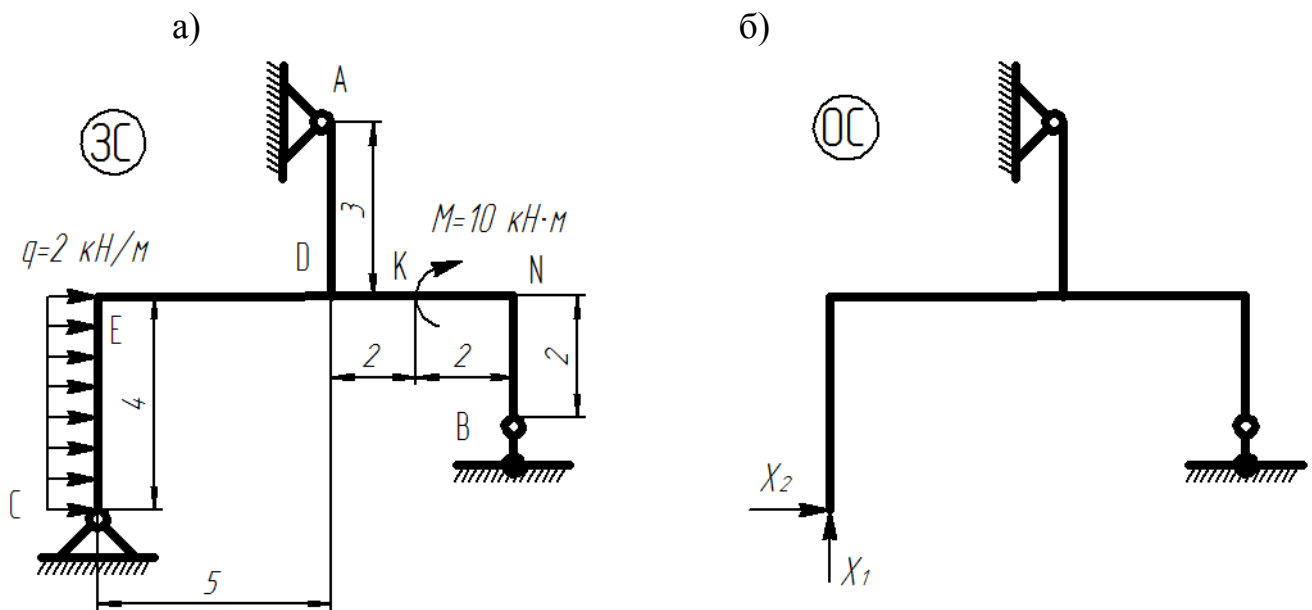


Рисунок 8 – Рама

3) Составляем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

4) Определяем коэффициенты канонических уравнений:

4.1) Строим эпюру изгибающих моментов M_p (грузовую эпюру):

Определяем реакции в опорах:

$$\sum M_A = 0;$$

$$M - q \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 3\right) - R_B \cdot 4 = 0;$$

$$R_B = \frac{10 - 2 \cdot 4 \cdot 5}{4} = -7,5 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A - R_B = 0;$$

$$R_A = 7,5 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0;$$

$$H_A + q \cdot 4 = 0;$$

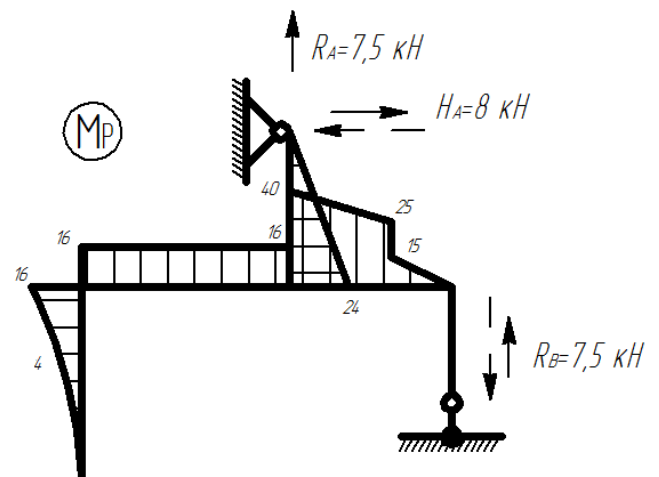
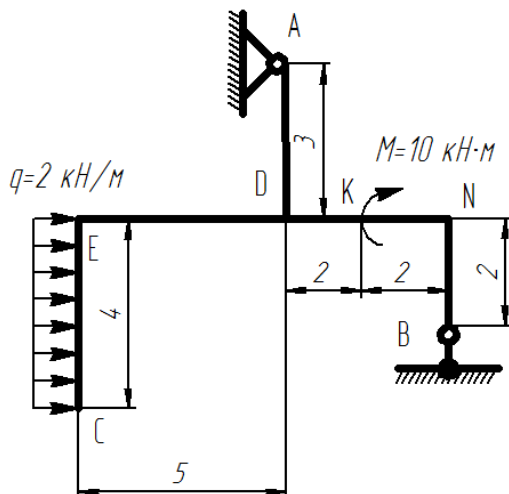
$$H_A = -8 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum M_B = 0;$$

$$R_A \cdot 4 - H_A \cdot (3 + 2) + M + q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 0;$$

$$7,5 \cdot 4 - 8 \cdot (3 + 2) + 10 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$



Т.к., найдены реакции во всех опорах, то все концы основной системы рамы являются свободными и построение эпюры изгибающих моментов будем вести отдельно для каждого из них к узлу D.

Рассмотрим «свободный» конец CD:

$$M_C = 0 \text{ кН·м};$$

$$M_{CE} = -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -2 \cdot 4 \cdot 2 = -16 \text{ кН·м};$$

$$M_{CE'} = -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -2 \cdot 4 \cdot 2 = -16 \text{ кН·м};$$

$$M_{CD} = -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -2 \cdot 4 \cdot 2 = -16 \text{ кН·м}.$$

Рассмотрим «свободный» конец BD:

$$M_B = 0 \text{ кН·м};$$

$$M_{BN} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{BN'} = -R_B \cdot 0 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{BK} = -R_B \cdot 2 = -7,5 \cdot 2 = -15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{BK'} = -R_B \cdot 2 - M = -7,5 \cdot 2 - 10 = -25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{BD} = -R_B \cdot 4 - M = -7,5 \cdot 4 - 10 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Рассмотрим «свободный» конец AD:

$$M_A = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{AD} = -H_A \cdot 3 = -8 \cdot 3 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4.2) Строим эпюры изгибающих моментов от единичных сил:

Строим эпюру \overline{M}_1 :

Определяем реакции в опорах:

$$\sum M_A = 0;$$

$$X_1 \cdot 5 - R_B \cdot 4 = 0;$$

$$R_B = \frac{1 \cdot 5}{4} = 1,25 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0;$$

$$X_1 - R_A + R_B = 0;$$

$$R_A = 2,25 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0;$$

$$H_A = 0.$$

Проверка:

$$\sum M_B = 0;$$

$$-R_A \cdot 4 + X_1 \cdot (5 + 4) = 0;$$

$$-2,25 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 0.$$

Построение эпюры \overline{M}_1 ведем способом аналогичным рассмотренному выше.

Строим эпюру \overline{M}_2 :

Определяем реакции в опорах:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-X_2 \cdot (4 + 3) - R_B \cdot 4 = 0;$$

$$R_B = -\frac{1 \cdot 7}{4} = -1,75 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A - R_B = 0;$$

$$R_A = 1,75 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0;$$

$$X_2 + H_A = 0;$$

$$H_A = -1 \text{ кН}.$$

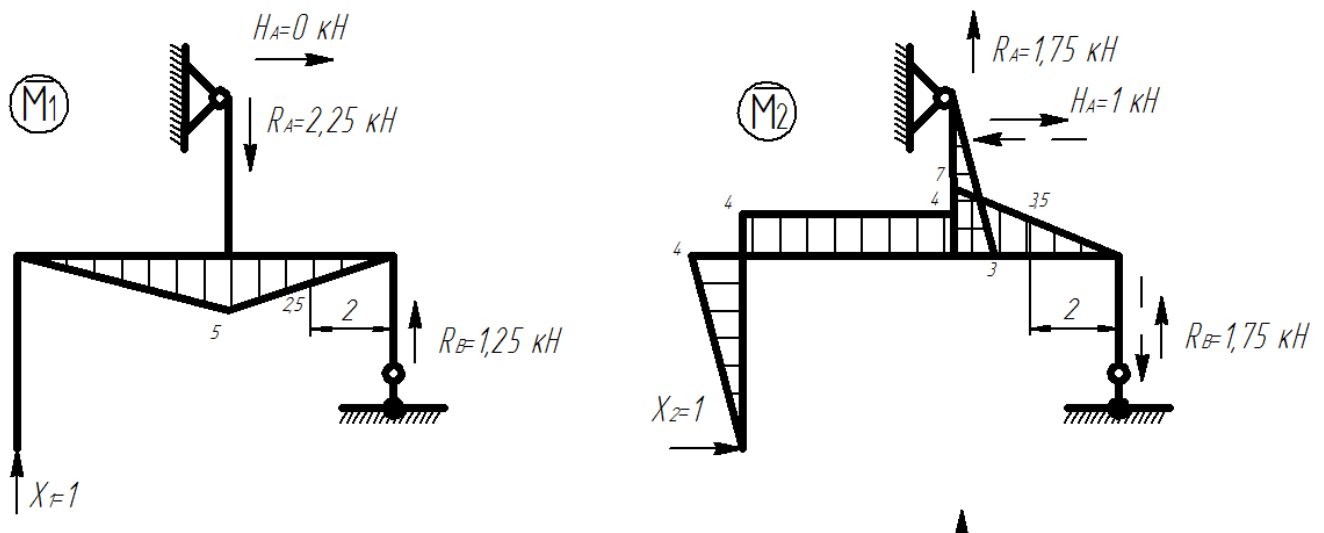
Проверка:

$$\sum M_B = 0;$$

$$R_A \cdot 4 - X_2 \cdot 2 - H_A \cdot (3 + 2) = 0;$$

$$1,75 \cdot 4 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 0.$$

Построение эпюры \overline{M}_2 ведем способом аналогичным рассмотренному выше.



4.3) Определяем главные коэффициенты:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EJ} \cdot dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 0) + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 5) \right) = \frac{75}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EJ} \cdot dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0) + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4) + \right. \\ \left. + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 7 \cdot 7 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3) \right) = \frac{175,6}{EJ}.$$

4.4) Определяем боковые коэффициенты:

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EJ} \cdot dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 0 \cdot 5) + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 7 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0) \right) = -\frac{96,7}{EJ}.$$

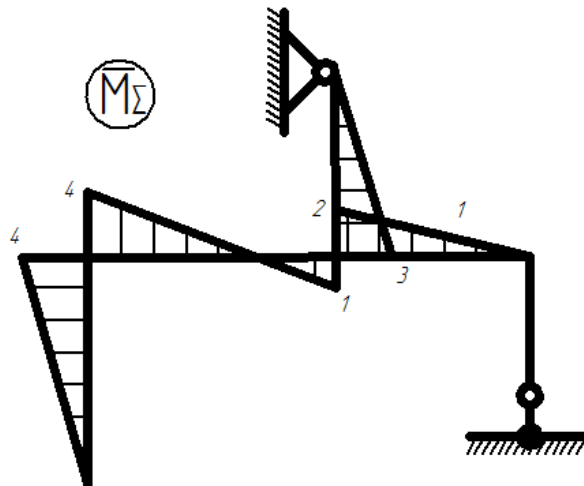
4.5) Определяем грузовые коэффициенты:

$$\Delta_{1P} = \sum_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot M_P \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 16 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 16 - 16 \cdot 5 + 0 \cdot 16) + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 40 \cdot 5 - 2 \cdot 2,5 \cdot 25 - 5 \cdot 25 - 2,5 \cdot 40) + \right. \\ \left. + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 15 \cdot 2,5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 2,5) \right) = -\frac{475}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_0^L \frac{\overline{M}_2 \cdot M_P \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 16 + 4 \cdot 0 + 16 \cdot 0) - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 16 + 2 \cdot 4 \cdot 16 + 4 \cdot 16 + 16 \cdot 4) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 24 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 3) + \right. \\ \left. + \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 7 \cdot 40 + 2 \cdot 3,5 \cdot 25 + 40 \cdot 3,5 + 25 \cdot 7) + \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 3,5 \cdot 15 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3,5 + 0 \cdot 15) \right) = \frac{841}{EJ}.$$

5) Проверяем коэффициенты канонических уравнений:

5.1) Строим суммарную единичную эпюру изгибающих моментов:



5.2) Проверяем главные и боковые коэффициенты:

$$\sum \delta_{ij} = \sum_0^L \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_\Sigma \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4) + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 - 4 \cdot 1) + \right. \\ \left. + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3) \right) = \frac{57,2}{EJ};$$

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{57,2}{EJ}.$$

5.3) Проверяем грузовые коэффициенты:

$$\begin{aligned}\sum \Delta_{iP} &= \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot M_P \cdot dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 16 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 4) - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 + \right. \\ &+ \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 16 - 2 \cdot 16 \cdot 1 - 1 \cdot 16 + 4 \cdot 16) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 24 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 24 \cdot 0) + \\ &+ \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 15 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 15 + 1 \cdot 0) + \left. \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 40 \cdot 2 + 2 \cdot 25 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 25 \cdot 2) \right) = \frac{366}{EI}; \\ \sum \Delta_{iP} &= \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{366}{EI}.\end{aligned}$$

6) Преобразуем и решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \frac{75}{EI} - X_2 \cdot \frac{96,7}{EI} - \frac{475}{EI} = 0 \\ -X_1 \cdot \frac{96,7}{EI} + X_2 \cdot \frac{175,6}{EI} + \frac{841}{EI} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} X_1 \cdot 75 - X_2 \cdot 96,7 = 475 \\ -X_1 \cdot 96,7 + X_2 \cdot 175,6 = -841 \end{cases};$$

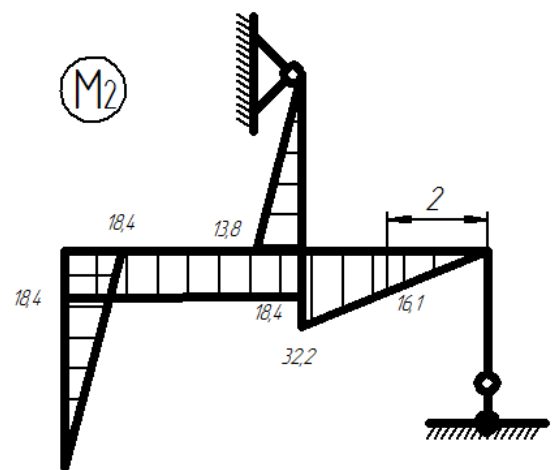
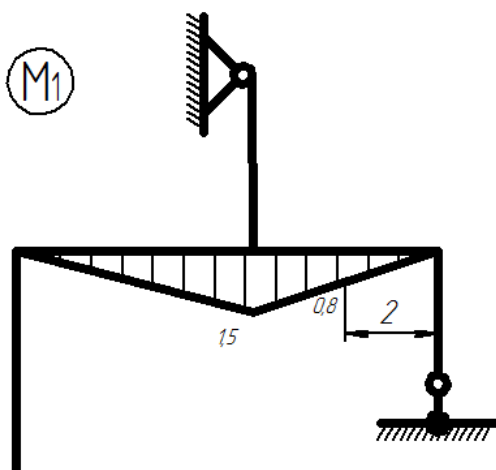
$$X_1 = \frac{475 + X_2 \cdot 96,7}{75} = 6,3 + X_2 \cdot 1,3;$$

$$-(6,3 + X_2 \cdot 1,3) \cdot 96,7 + X_2 \cdot 175,6 = -841;$$

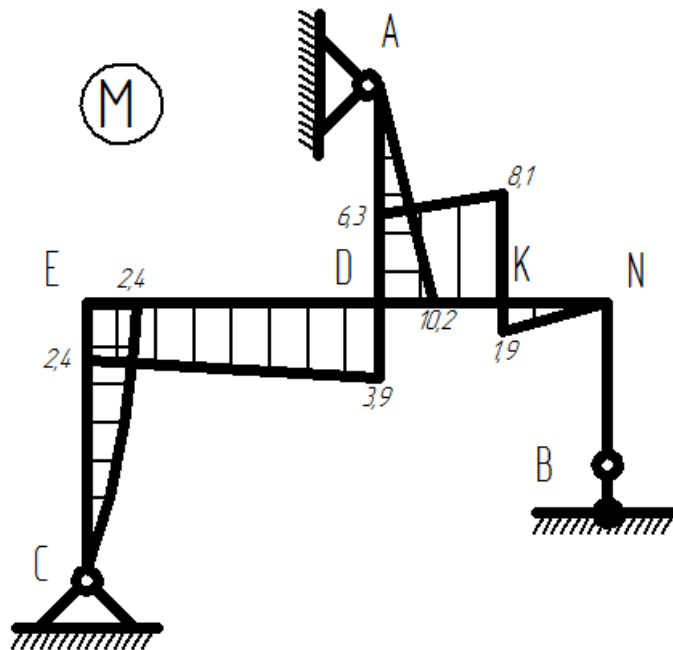
$$X_2 = -4,6 \text{ кН};$$

$$X_1 = 0,3 \text{ кН}.$$

7) Умножаем каждую единичную эпюру на соответствующее значение силы X_i ($M_1 = \overline{M}_1 \cdot X_1$, $M_2 = \overline{M}_2 \cdot X_2$):



8) Строим итоговую эпюру изгибающих моментов $M = M_1 + M_2 + M_P$:



9) Строим эпюру поперечных сил (Q):

$$Q = \frac{M_{np} - M_{лев}}{L} \pm \frac{q \cdot L}{2}.$$

Знак « \pm » в формуле ставится в соответствии с правилом знаков поперечных сил (если сила распределенная нагрузка q «вращается» относительно точки по часовой стрелки, то знак «+», если против часовой – знак «-»).

$$Q_{CE} = \frac{0 - (-2,4)}{4} \pm \frac{2 \cdot 4}{2} = 0,6 \pm 4;$$

$$Q_{CE}^C = 0,6 + 4 = 4,6 \text{ кН};$$

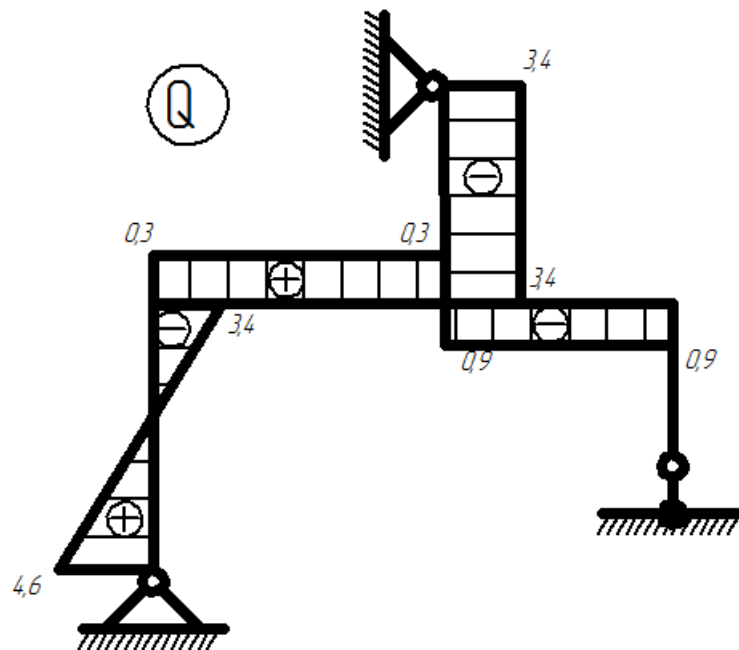
$$Q_{CE}^E = 0,6 - 4 = -3,4 \text{ кН};$$

$$Q_{ED} = \frac{3,9 - 2,4}{5} = 0,3 \text{ кН};$$

$$Q_{AD} = \frac{-10,2 - 0}{3} = -3,4 \text{ кН};$$

$$Q_{DK} = \frac{-8,1 - (-6,3)}{2} = -0,9 \text{ кН};$$

$$Q_{KN} = \frac{0 - 1,9}{2} = -0,9 \text{ кН}.$$



10) Строим эпюру продольных сил (N):

Способом вырезания узлов (рисунок 9, б) из эпюры поперечных сил строим эпюру продольных сил (рисунок 9, а) с учетом изложенного выше правила знаков (если продольная сила направлена к узлу, то на эпюре N знак «-», если от узла, то знак «+»):

Узел Е:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ Q_{CE} - N_{ED} &= 0; & N_{ED} &= 3,4 \text{ кН}; \\ \sum Y &= 0; \\ N_{CE} - Q_{ED} &= 0; & N_{CE} &= 0,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

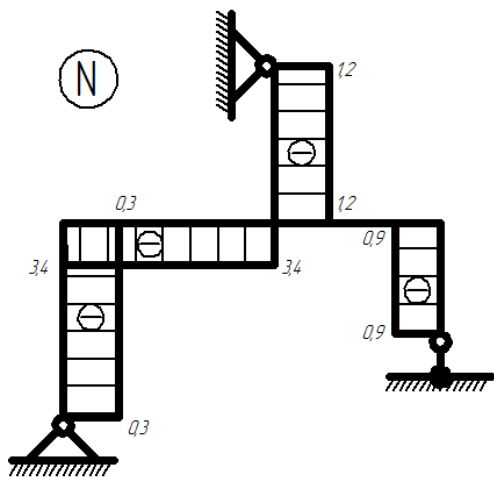
Узел N:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ -Q_{KN} + N_{EN} &= 0; & N_{EN} &= 0,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Узел D:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ N_{ED} - Q_{AD} &= 0; \\ \sum Y &= 0; \\ Q_{ED} + Q_{DK} - N_{AD} &= 0; & N_{AD} &= 1,2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

а)



б)

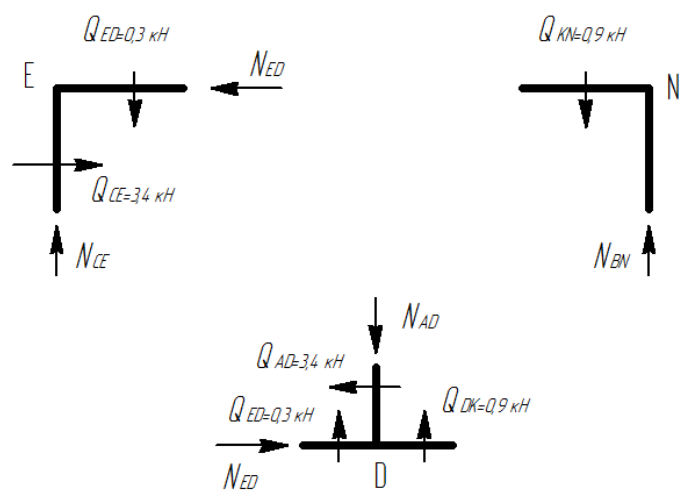


Рисунок 9 – Построение эпюры продольных сил

Список литературы

1. **Дарков, А.В.** Строительная механика : учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 10-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2005. – 656 с.
2. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / А.Е. Саргсян [и др.]. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
3. **Ржаницын, А.Р.** Строительная механика : учебное пособие для строительных специальностей вузов / А.Р. Ржаницын. – 2-е изд. перераб. – М. : Высш. школа, 1991. – 439 с.
4. **Борисевич, А.А.** Строительная механика : учебник для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Мн. : БНТУ, 2007. – 821 с.
5. **Селюков, В.М.** Расчетно-проектировочные работы по строительной механике : учебн. пособие для вузов / В.М. Селюков. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1989. – 205 с.

Приложение А
(справочное)
Расчетные схемы для индивидуальной работы

Задача: построить эпюры изгибающих моментов (M), поперечных сил (Q) и продольных сил (N) для заданной статически неопределимой рамы методом сил.

Номер варианта принимается по списку группы.

